



# DÍMERO DE BOSE-HUBBARD POLARITÓNICO CON SIMETRÍA $\mathcal{PT}$

I. Jesán Velázquez Reséndiz<sup>(1)</sup> and Yuri G. Rubo<sup>(2)</sup>

(1) Instituto de Física, UNAM, 01000, Ciudad de México, México

(2) Instituto de Energías Renovables, UNAM, 62580 Temixco, Morelos, Mexico

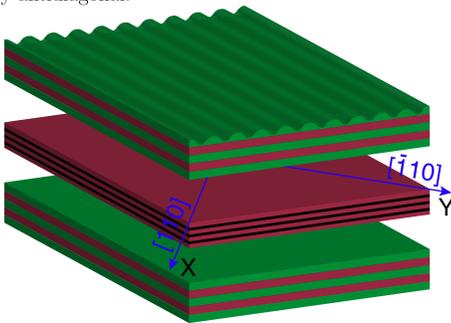


## Abstract

Proponemos una configuración de microcavidad rallada para formar condensados de polaritones atrapados con simetría paridad-tiempo ( $\mathcal{PT}$ ) y estudiar sus propiedades de polarización. En nuestro caso, la simetría  $\mathcal{PT}$  se conserva en presencia de interacción polaritón-polaritón. En el caso de un desequilibrio débil entre ganancia y disipación, en comparación con la división de polarización lineal, la esfera de Stokes de polarización se deforma en un elipsoide. Mostramos que cuando la división de la polarización lineal se vuelve débil, i.e., cuando la simetría  $\mathcal{PT}$  se rompe para sistemas que no interactúan, la esfera de Stokes se transforma en un hiperboloide, pero la dinámica sigue siendo pseudoconservadora. Esto permite la manipulación de la polarización del condensado polaritónico cambiando la división de la polarización sin perder su coherencia.

## Estructura de la microcavidad

Los polaritones en microcavidades semiconductoras presentan polarización lo que se conoce en inglés como *linear polarization dichroism*, que está caracterizado por la división  $\epsilon$  entre la polarización X (horizontal) y Y (vertical), las cuales están definidas por los ejes cristalográficos [110] y  $\bar{1}\bar{1}0$ , como se muestra en la figura de abajo. La división aparece, principalmente, debido a la combinación de las componentes de la combinación de la luz y el hueco-excitón pesado de la función de onda del polaritón en la interfase de baja simetría del pozo cuántico [1, 2]. La división es del orden de  $\mu eV$  típicamente. Adicionalmente, proponemos la introducción de un acoplamiento disipativo, que puede lograrse por *weak sub-wavelength grating* (SWG) de la superficie de la microcavidad. Esto genera que la reflectividad en los espejos de Bragg dependa de la polarización del polaritón [3, 4]. Para obtener un desequilibrio de la disipación adecuado, se puede utilizar un rallado a lo largo de las direcciones diagonal o antidiagonal, i.e., [100] y [010]. Esto introduce una diferencia en el tiempo de vida de los polaritones con polarizaciones diagonal y antidiagonal.



## El modelo

El Hamiltoniano de un solo polaritón que describe el estado de polarización de un polaritón atrapado puede escribirse en términos de la base de polarizaciones circulares como

$$H_s = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -ig & \epsilon - i\epsilon' + \gamma \\ \epsilon + i\epsilon' - \gamma & -ig \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Aquí  $g = \Gamma - W$ , donde  $W$  es el bombeo no resonante externo y  $\Gamma$  es el promedio del tasa de disipación, y  $\gamma$  define el desequilibrio en la disipación (definimos  $\hbar = 1$ ). En general, débil SWG induce una división extra,  $\epsilon'$ , pero considerámos el caso  $\epsilon' = 0$  en lo que sigue. Cuando el bombeo externo del condensado iguala a la disipación promedio, i.e.,  $g = 0$ , el condensado está descrito por el Hamiltoniano con simetría  $\mathcal{PT}$

$$H_{s0} = -\frac{\epsilon\sigma_x + i\gamma\sigma_y}{2} \quad (2)$$

con las energías  $E_{\pm} = \pm\sqrt{\epsilon^2 - \gamma^2}/2$ .

La extensión de nuestro modelo a muchos cuerpos toma en cuenta la interacción polaritón-polaritón con la misma polarización circular, que corresponde a las siguientes ecuaciones

$$i\frac{d\hat{\psi}_{\pm 1}}{dt} = -\frac{1}{2}(\epsilon \pm \gamma)\hat{\psi}_{\mp 1} + \frac{\alpha}{2}\hat{\psi}_{\pm 1}^{\dagger 2}\hat{\psi}_{\pm 1}^2, \quad (3)$$

para la dinámica de los operadores de aniquilación de polaritones con polarización circular derecha (+1) e izquierda (-1), donde  $\alpha$  es la constante de interacción.

Cuando los operadores de espín son introducidos como  $\hat{s}_k = \frac{1}{2}(\hat{\psi}_k^{\dagger} \cdot \sigma_k \cdot \hat{\psi}_k)$ , con  $k = 0, x, y, z$ . Donde  $\hat{\psi} = (\hat{\psi}_{+1}, \hat{\psi}_{-1})^T$  es el vector columna y  $\sigma_{x,y,z}$  las matrices de Pauli, mientras que  $\sigma_0$  es la matriz identidad de  $2 \times 2$ . La dinámica del espín está gobernada por

$$\frac{d\hat{s}_0}{dt} = -\gamma\hat{s}_y, \quad \frac{d\hat{s}_x}{dt} = -\frac{\alpha}{2}\{\hat{s}_z, \hat{s}_y\}, \quad (4a)$$

$$\frac{d\hat{s}_y}{dt} = -\gamma\hat{s}_0 + \epsilon\hat{s}_z + \frac{\alpha}{2}\{\hat{s}_z, \hat{s}_x\}, \quad \frac{d\hat{s}_z}{dt} = -\epsilon\hat{s}_y. \quad (4b)$$

El Hamiltoniano no hermitiano de Bose-Hubbard que corresponde a las Ecs. (3) es

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{(\epsilon + \gamma)}{2}\hat{\psi}_{+1}^{\dagger}\hat{\psi}_{-1} - \frac{(\epsilon - \gamma)}{2}\hat{\psi}_{-1}^{\dagger}\hat{\psi}_{+1} + \frac{\alpha}{4}(\hat{\psi}_{+1}^{\dagger 2}\hat{\psi}_{+1}^2 + \hat{\psi}_{-1}^{\dagger 2}\hat{\psi}_{-1}^2), \quad (5)$$

o usando los operadores de espín

$$\mathcal{H} = H_0(\hat{\mathbf{s}}) + iH_1(\hat{\mathbf{s}}), \quad (6a)$$

$$H_0(\hat{\mathbf{s}}) = -\epsilon\hat{s}_x + \frac{\alpha}{2}(\hat{s}_z^2 + \hat{s}_0^2 - \hat{s}_0), \quad (6b)$$

$$H_1(\hat{\mathbf{s}}) = -\gamma\hat{s}_y. \quad (6c)$$

Es fácil de ver que las energías del sistema para un polaritón son reales y la simetría  $\mathcal{PT}$  no se rompe cuando  $|\epsilon| > |\gamma|$ . Este Hamiltoniano no hermitiano puede convertirse en uno hermitiano con la siguiente transformación de Dyson

$$\mathcal{H}_D = e^{-t\hat{s}_z}\mathcal{H}e^{t\hat{s}_z}, \quad (7)$$

con  $\tanh(t) = \gamma/\epsilon$ . Eliminando  $H_1$  y renormalizando el parámetro del acoplamiento de Josephson  $\tilde{\epsilon} = \sqrt{\epsilon^2 - \gamma^2}$ .

## Dinámica del campo medio

En la aproximación del campo medio, válida para números grandes de ocupación, el modelo preserva una dinámica pseudoconservativa, aún con valores pequeños de división  $\epsilon$ . En este caso, el operador de espín  $\hat{\mathbf{s}} = \{\hat{s}_x, \hat{s}_y, \hat{s}_z\}$ , es reemplazado por un vector tridimensional  $\mathbf{S}$  con longitud  $S = S_0$ . La dinámica de sus componentes está dada por

$$\dot{S}_x = -\alpha S_z S_y, \quad \dot{S}_y = -\gamma S + \epsilon S_z + \alpha S_z S_x, \quad (8a)$$

$$\dot{S}_z = -\epsilon S_y, \quad \dot{S} = -\gamma S_y. \quad (8b)$$

En lo que sigue, asumimos que los parámetros  $\alpha$ ,  $\gamma$ , y  $\epsilon$  Tienen valores positivos. En el caso de valores negativos, se puede restablecer las ecuaciones (8) con valores positivos de los parámetros usando las transformaciones adecuadas de las componentes del espín. E.g., en el caso de interacción atractiva,  $\alpha < 0$ , aplicamos  $S_x \rightarrow -S_x$ . En el caso de  $\epsilon < 0$  aplicamos  $S_z \rightarrow -S_z$  junto con  $S_x \rightarrow -S_x$ . Finalmente, en el caso de  $\gamma < 0$  invertimos  $S_z \rightarrow -S_z$  y  $S_y \rightarrow -S_y$ . Escogiendo  $\epsilon^{-1}$  como la unidad de tiempo siempre podemos definir  $\epsilon = 1$ , y re-escalar el espín  $\alpha S = s = \{x, y, z\}$  para obtener

$$\dot{x} = -zy, \quad \dot{y} = -\gamma s + (1+x)z, \quad (9a)$$

$$\dot{z} = -y, \quad \dot{s} = -\gamma y. \quad (9b)$$

El sistema tiene dos cantidades de movimiento, la "energía"  $E$  y la longitud del espín  $\rho$ ,

$$E = -x + \frac{z^2}{2}, \quad \rho = s - \gamma z, \quad (10)$$

que nos conduce a la ecuación

$$(\dot{z})^2 = (\rho + \gamma z)^2 - \left(\frac{z^2}{2} - E\right)^2 - z^2 = -\frac{1}{4}(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4), \quad (11)$$

donde definimos las cuatro raíces  $z_{1,2,3,4}$  del polinomio cuártico. La ecuación (11) se resuelve aplicando la transformación de Möbius  $w(t) = \frac{az(t)+b}{cz(t)+d}$ . En donde podemos ajustar las constantes  $a, b, c, d$  para obtener la solución en términos de las ecuaciones elípticas de Jacobi,  $w(t) = \pm \text{cn}(\omega t, m)$ ,

$$\left(\frac{dw(t)}{dt}\right)^2 = -m\omega^2(w^2 - w_0^2)(w^2 - 1), \quad w_0^2 = \frac{m-1}{m}. \quad (12)$$

Asumimos  $z_1 \leq z_2 \leq z_3 \leq z_4$  ó  $z_1 \leq z_4$ ,  $z_2 = z_3^*$ . Los coeficientes de la transformación pueden encontrarse con el mapeo

$$\frac{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)} = \frac{4w_0}{(1 + w_0)^2}, \quad (13)$$

por lo que la solución está dada en términos de las funciones elípticas de Jacobi con la forma

$$z = \frac{\nu_1 z_4 [1 \pm \text{cn}(\omega t, m)] + \nu_4 z_1 [1 \mp \text{cn}(\omega t, m)]}{\nu_1 [1 \pm \text{cn}(\omega t, m)] + \nu_4 [1 \mp \text{cn}(\omega t, m)]}, \quad (14a)$$

$$x = \frac{1}{2}z^2 - E, \quad (14b)$$

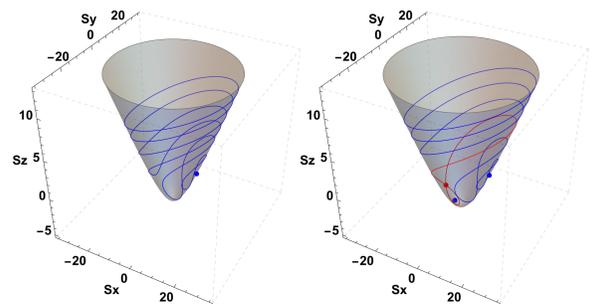
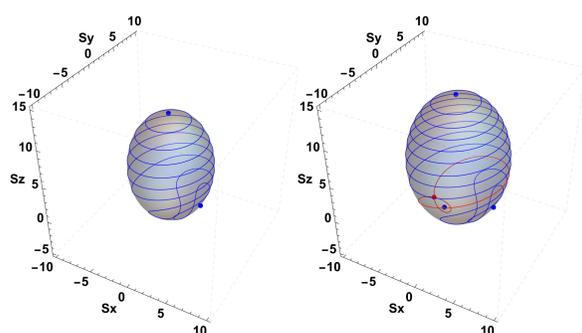
$$y = \frac{8\omega^3(z_4 - z_1)\text{dn}(\omega t, m)\text{sn}(\omega t, m)}{(\nu_1 [1 \pm \text{cn}(\omega t, m)] + \nu_4 [1 \mp \text{cn}(\omega t, m)])^2}, \quad (14c)$$

donde

$$\nu_1 = \sqrt{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)}, \quad \nu_4 = \sqrt{(z_3 - z_4)(z_2 - z_4)}, \quad (15a)$$

$$m = \frac{1}{4} \left[ 2 + \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{\nu_1 \nu_4} + \frac{\nu_1 \nu_4}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)} \right] \quad (15b)$$

$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\nu_1 \nu_4}, \quad (15c)$$



## Puntos fijos

Igualando a cero las derivadas temporales de las ecuaciones (9) se obtiene

$$y = 0, \quad z = \frac{\gamma\rho}{1 - \gamma^2 + x}, \quad (16a)$$

$$(1 - \gamma^2 + x)^2 x^2 - \rho^2 [(1+x)^2 - \gamma^2] = 0, \quad (16b)$$

las cuales, excepto por la coordenada  $y$ , debemos resolver para encontrar los puntos fijos. La variable  $\rho = s - \gamma z$  es una constante dinámica (longitud del espín). La ecuación cuártica (16b) para  $x$  arroja dos condiciones para el número de puntos fijos

$$2 \text{ puntos fijos, } 0 < \rho < \rho_c, \quad (17a)$$

$$4 \text{ puntos fijos, } \rho > \rho_c. \quad (17b)$$

Es fácil de ver que siempre tendremos puntos fijos, al menos dos. La longitud crítica del espín  $\rho_c$  es donde el sistema pasa a tener cuatro puntos fijos, y está dada por el parámetro de la disipación

$$\rho_c = [1 + \gamma^{2/3} + \gamma^{4/3}]^{3/2}. \quad (18)$$

Para el caso de **acoplamiento disipativo débil** ( $\gamma < 1$ , primeras dos figuras en la columna de en medio), el espín es una elipsoide alargada en el eje  $z$ . Para elipsoides pequeñas ( $\rho < \rho_c$ ), hay dos puntos fijos de tipo foco. Por otro lado, hay cuatro puntos fijos, tres focos y uno de silla para  $\rho > \rho_c$ . En estas figuras tomamos  $\gamma = 0.7$ , por lo que  $\rho_c = 3.741$ ,  $\rho = 3.6$  en la figura superior izquierda, y  $\rho = 4.3$  en la figura superior derecha.

En el **acoplamiento disipativo crítico** ( $\gamma = 1$ ), la topología del sistema cambia a paraboloides. La longitud crítica del espín es  $\rho_c = \sqrt{27}$ , que conduce a nuevas condiciones para los puntos fijos: un foco para  $\rho < \sqrt{27}$ ; dos focos y uno de silla para  $\rho > \sqrt{27}$ .

Para el **acoplamiento disipativo fuerte** ( $\gamma > 1$ , dos figuras de la columna izquierda), el espín se convierte en una hiperboloide. Con el calor de  $\gamma = 1.6$  obtenemos  $\rho_c = 8.729$ . En la figura inferior izquierda, tenemos el caso de  $\rho = 8.5 < \rho_c$  con un foco. En la figura inferior derecha, tenemos  $\rho = 10.7 > \rho_c$  con dos focos y un punto de silla.

## Conclusiones

Demostremos que la simetría  $\mathcal{PT}$  puede ser preservada en presencia de interacción polaritón-polaritón para condensados polaritónicos atrapados con un diseño especial de desequilibrio de disipación-ganancia. Hemos analizado las bifurcaciones de los puntos fijos del láser y el cambio en la topología de las trayectorias del espín. Probamos que para un gran número de ocupación y fuerte desequilibrio, el condensado de espín sigue una dinámica pseudoconservativa definida por trayectorias cerradas en una superficie hiperbólica.

## Artículo de referencia

Este póster está basado en el artículo I. Jesán Velázquez-Reséndiz and Yuri G. Rubo *Phys. Rev. B* 109, 085312 (2024).

## References

- [1] I. L. Aleiner and E. L. Ivchenko. Anisotropic exchange splitting in type-II GaAs/AlAs superlattices. *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 55(11):662-664, June 1992. [*JETP Lett.* 55, 692-695 (1992)].
- [2] G. Malpuech, M. M. Glazov, I. A. Shelykh, P. Bigenwald, and K. V. Kavokin. Electronic control of the polarization of light emitted by polariton lasers. *Appl. Phys. Lett.*, 88(11):111118, March 2006.
- [3] Michael C. Y. Huang, Y. Zhou, and Connie J. Chang-Hasnain. A surface-emitting laser incorporating a high-index-contrast subwavelength grating. *Nature Photonics*, 1(2):119-122, 2007.
- [4] Seonghoon Kim, Bo Zhang, Zhaorong Wang, Julian Fischer, Sebastian Brodbeck, Martin Kamp, Christian Schneider, Sven Höfling, and Hui Deng. Coherent polariton laser. *Phys. Rev. X*, 6:011026, Mar 2016.